TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

JOONAS MÄKI

LUOTETTAVUUSTEKNIIKAN YLEISIMMÄT JAKAUMATYYPIT – TAUSTA JA KÄYTTÖKOHTEET

Kandidaatintyö

Tarkastaja: yliopisto-opettaja Jouko Laitinen

TIIVISTELMÄ

JOONAS MÄKI: Luotettavuustekniikan yleisimmät jakaumatyypit– tausta ja käyttökohteet
Tampereen teknillinen yliopisto
Kandidaatintyö, 29 sivua, 0 liitesivua
Joulukuu 2017
Tekniikan kandidaatin tutkinto-ohjelma
Pääaine: Kone- ja tuotantotekniikka
Tarkastaja: Jouko Laitinen

Avainsanat: luotettavuustekniikka, Weibull-jakauma, eksponenttijakauma, log-normaalijakauma, Gamma-jakauma, Poisson-jakauma

Tässä työssä kuvataan yleisimpiä luotettavuustekniikassa käytettäviä matemaattisia jakaumia. Työ on kirjallisuusselvitys, jossa tietoa useista eri lähteistä yhdistelemällä kuvataan erilaisia jakaumia, joiden avulla luotettavuustekniikassa käsitellään vikadataa. Jakaumia kuvataan ensin matemaattisten yhtälöiden avulla. Käytettävät yhtälöt on selitetty työn alussa. Tämän lisäksi jakaumista esitetään niiden synnystä ja kehityksestä kertovaa taustatietoa, sekä kuvaillaan niiden käyttökohteita.

Työssä tarkastellaan Weibull-jakaumaa, eksponenttijakaumaa, log-normaalijakaumaa, Gamma-jakaumaa ja Poisson-jakaumaa. Tämän lisäksi työn teoreettinen tausta -osiossa kerrotaan taustatietoa luotettavuustekniikan historiasta.

SISÄLLYSLUETTELO

1 JOHDANTO

Luotettavuustekniikassa tutkitaan komponenttien tai laitteiden vikaantumisaikoja. Näiden kuvaamisessa käytetään apuna erilaisia matemaattisia jakaumia, joista useat on kehitetty jotakin tiettyä käyttötarkoitusta varten. Niiden avulla voidaan jonkin komponentin vikaantumista ennustaa hyvinkin vähäisen vikadatan perusteella. Tämä edellyttää kuitenkin jakaumatyyppien tuntemista ja tilanteeseen sopivan jakaumatyypin löytämistä.

Tämän kandidaatintyön tarkoituksena on tarjota katsaus luotettavuustekniikassa käytettäviin jakaumatyyppeihin esittelemällä taustatietoja ja käyttökohteita eri jakaumatyypeistä. Luotettavuustekniikassa käytettävien jakaumien suuren määrän vuoksi tässä työssä keskitytään vain muutamaan yleisimpään jakaumaan. Tarkasteltaviksi jakaumiksi valittiin neljä jatkuvaa jakaumaa: Weibull-jakauma, eksponenttijakauma, log-normaalijakauma ja Gamma-jakauma sekä yksi diskreetti jakauma, Poisson-jakauma. Jatkuvalla jakaumalla tarkoitetaan jakaumaa, jota kuvaavat funktiot ovat jatkuvia. Diskreetillä jakaumalla puolestaan tarkoitetaan jakaumaa, jota kuvaavat funktiot ovat diskreettejä, eli niiden muuttujien on oltava kokonaislukuja.

Työn alussa kuvataan tarkemmin työn teoreettista taustaa, tutkimusongelmaa sekä työn rajausta. Alussa myös selvennetään useita luotettavuustekniikkaan liittyviä käsitteitä, jotka saattavat olla lukijalle tuntemattomia. Tämän jälkeen jokainen käsiteltävistä jakaumista esitellään omissa kappaleissaan. Jakaumista kerrotaan ensin perustiedot, sekä esitellään niitä kuvaavat funktiot. Tämän jälkeen kerrotaan jakauman taustasta ja lopuksi esitellään sen käyttökohteita.

Tämä työ on luonteeltaan kirjallisuusselvitys, eli työssä ei tehdä mitään varsinaista kokeellista tutkimusta. Työssä on käytetty lähteinä useita aiheeseen liittyviä julkaisuja. Tärkeimmän teoreettisen pohjan työlle muodostavat Elsayedin (2012) ja O'Connorin et. al (2016) kirjat, jotka luovat yleiskatsauksen luotettavuustekniikan jakaumiin.

2 TEOREETTINEN TAUSTA, TUTKIMUSONGELMA JA TYÖN RAJAUS

2.1 Tutkimusongelma

Luotettavuustekniikassa komponenttien tai järjestelmien vikaantumista kuvaavaa informaatiota, jota kutsutaan vikadataksi, analysoidaan usein erilaisten jakaumien avulla. Näitä jakaumia on historian aikana kehitetty useita erilaisia. Eri jakaumat soveltuvat erilaisiin käyttökohteisiin.

Tärkeimmät tässä työssä selvitettävät kysymykset ovat: Mitkä ovat eri luotettavuustekniikan jakaumille tyypilliset ominaisuudet? Mitä eroa eri jakaumilla on? Mihin käyttötarkoitukseen mikin jakauma soveltuu? Kuinka pitkä historia eri jakaumilla on ja ketkä ovat vaikuttaneet niiden kehitykseen?

Näihin kysymyksiin vastaamalla saadaan luotua katsaus luotettavuustekniikassa käytettävien yleisimpien jakaumien ominaisuuksiin. Historiatiedon selvittäminen auttaa ymmärtämään jakaumien käyttötarkoitusta. Niiden ominaisuuksia ja käyttötarkoituksia vertailemalla jakaumien erot tulevat selville.

2.2 Työn rajaus

Koska luotettavuusteknisiä jakaumia on olemassa hyvin paljon, olisi mahdotonta käsitellä edellä mainittuja asioita niistä kaikista yksittäisessä kandidaatintyössä. Tämän vuoksi tässä työssä käsitellään viittä hyvin tunnettua ja yleistä jakaumaa. Nämä jakaumat ovat Weibull-jakauma, eksponenttijakauma, log-normaalijakauma, Gamma-jakauma ja Poisson-jakauma. Normaalijakauma jätettiin pois työstä sen yleisyyden vuoksi.

Valitut jakaumat ovat log-normaalijakaumaa lukuun ottamatta sukua toisilleen, eli ne on kehitetty toisiaan apuna käyttäen (O'Connor et al. 2016, s. 33). Valitsemani jakaumat ovat jatkuvia jakaumia lukuun ottamatta Poisson-jakaumaa, joka on diskreetti.

2.3 Käsitteitä

Luotettavuustekniikan jakaumia kuvataan erilaisten funktioiden avulla. Tärkeimmät tässä työssä käytettävät funktiot ovat hasardifunktio, tiheysfunktio ja kertymäfunktio.

Tiheysfunktiolla $f(t)$ tarkoitetaan funktiota, josta voidaan integroimalla laskea todennäköisyys sille, että jokin tapahtuma, kuten tässä työssä useimmiten komponentin rikkoutuminen, tapahtuu jollakin aikavälillä. Tiheysfunktiolle pätee yhtälö

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1, \tag{2.1}$$

joka tarkoittaa, että kokonaistodennäköisyys tapahtuman toteutumiselle on 1. Diskreeteille jakaumille tämä yhtälö on muotoa

$$\sum_k f(k) = 1\ , \tag{2.2}$$

joka tarkoittaa samaa. (O'Connor et al. 2016, s. 9)

Integroimalla tämä funktio saadaan kertymäfunktio F(t), joka kuvaa todennäköisyyttä sille, että kyseinen tapahtuma tapahtuu tiettyyn ajanhetkeen t mennessä. Voidaan siis lausua, että

$$\int f(t)\, dt = F(t) \tag{2.3}$$

tai diskreetin funktion ollessa kyseessä

$$\sum_{k_t \leq k} f(k_i). \tag{2.4}$$

Jatkuville kertymäfunktiolle on voimassa yhtälöt

$$\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0 \tag{2.5}$$

ja

$$\lim_{t \to \infty} F(t) = 1, \tag{2.6}$$

ja diskreeteille funktioille pätee vastaavasti

$$\lim_{k \to \infty} F(k) = 1. \tag{2.7}$$

Nämä yhtälöt tarkoittavat, että tapahtuma ei ole mahdollinen ennen jotain ajanhetkeä, mutta se tapahtuu varmasti johonkin ajanhetkeen mennessä. (O'Connor et al. 2016, s. 11)

Luotettavuusfunktio R(t) toteuttaa yhtälön

$$R(t) = 1 - F(t)\ , \tag{2.8}$$

eli se siis kuvaa todennäköisyyttä, jolla jokin komponentti on säilynyt ehjänä ajanhetkeen t asti (O'Connor et al. 2016, s. 12). Koska luotettavuusfunktio on johdettavissa kertymäfunktiosta yksinkertaisella laskutoimituksella, annetaan tässä työssä usein jakaumille yleensä vain kertymäfunktio.

Näiden jakaumien lisäksi todennäköisyysjakaumiin liittyy olennaisesti hasardifunktio. Se on funktio, joka kuvaa komponentin hetkellistä vioittumistodennäköisyyttä. Tällä tarkoitetaan todennäköisyyttä, jolla komponentti, joka on ehjä ajanhetkellä t, hajoaa lyhyen ajanhetken sisällä. Matemaattisesti hasardifunktio voidaan ilmaista muodossa

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta F(t)}{\Delta t R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}, \tag{2.9}$$

jossa F(t) on kertymäfunktio, R(t) luotettavuusfunktio ja f(t) tiheysfunktio. Diskreeteille jakaumille hasardifunktio voidaan esittää muodossa

$$h(k) = \frac{f(k)}{R(k-1)}, \tag{2.10}$$

jossa k on diskreetti aikaan tai käyttökertoihin liittyvä muuttuja. (Elsayed 2012, s. 15; O'Connor et al. 2016, s. 13−14)

Tämän lisäksi jakaumien kuvaamisessa käytetään apuna keskiarvoa, varianssia, vinouskerrointa ja huipun kaarevuuskerrointa. Vinouskerroin kuvaa jakauman epäsymmetrisyyttä ja huipun kaarevuuskerroin huipun terävyyttä. Osa näistä saa arvokseen suoraan jonkin jakauman parametreista, kun taas jotkin on laskettava monimutkaisempia kaavoja käyttäen. Jakauman keskiarvo μ saadaan yhtälöstä

$$E[X] = \mu = \mu'_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \tag{2.11}$$

jossa f(x) on jakauman tiheysfunktio. Siinä μ'_1 tarkoittaa jakauman ensimmäisen keskusmomentin derivaattaa. Jakauman varianssi saadaan yhtälöstä

$$\sigma^2 = \mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx, \tag{2.12}$$

jossa μ_2 tarkoittaa jakauman toista keskusmomenttia. Vinouskerroin saadaan yhtälöstä

$$S_c = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{2.13}$$

jossa μ_2 ja μ_3 ovat jakauman toinen ja kolmas keskusmomentti. Huipun kaarevuuskerroin saadaan puolestaan yhtälöstä

$$K_c = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2}, \tag{2.14}$$

jossa vastaavasti μ_2 ja μ_4 ovat jakauman toinen ja neljäs keskusmomentti. (O'Connor et al. 2016, s. 20–21)

Alan kirjallisuutta lukiessa eri teoksissa samaa muuttujaa merkitään usein eri kirjaimella. Johdonmukaisuuden vuoksi tässä teoksessa käytetään O'Connorin kirjan (2016) mukaisia merkintöjä muuttujista. Tämän seurauksena jostakin muusta lähteestä saadussa materiaalissa olevista muuttujista käytettäviä kirjaimia on jouduttu muuttamaan johdonmukaisuuden varmistamiseksi.

2.4 Teoreettinen tausta

Tämän työn aihepiirin laajuudesta johtuen ei olisi tarkoituksenmukaista mainita kaikkia aiheeseen liittyviä varhaisempia julkaisuja. Tässä luvussa pyritään kuitenkin kuvaamaan tärkeimpiä luetettavuustekniikan kehitykseen vaikuttaneita julkaisuja, sekä erityisesti tämän työn tekemisessä apuna käytettyjä julkaisuja.

Luotettavuustekniikassa käytettäviin jakaumiin liittyen on julkaistu useita teoksia, osa yleisluonteisia teoksia, jotka kuvaavat useita eri jakaumia, sekä johonkin tiettyyn jakaumaan liittyviä teoksia. Asian havainnollistamiseksi esimerkiksi Web of Science -palvelussa sanalle luotettavuus saa englanniksi hakemalla 10 000 osumaa (vuonna 2006) ja hakukone googlessa jopa 192 miljoonaa osumaa (vuonna 2017) (Saleh & Marais 2006, s. 249).

Vaikka sana luotettavuus määriteltiin ensimmäisen kerran Oxford English Dictionaryssä jo vuonna 1816, luotettavuustekniikan kehitys omaksi tieteenalakseen alkoi 1950-luvun puolivälissä. Luotettavuustekniikassa yhdistyvät tilastot ja todennäköisyys, ja sen syntyyn vaikuttivat toisen maailmansodan aikaisen aseteollisuuden tarpeet. Myös 1950-luvulla Yhdysvaltain armeija vaikutti merkittävästi uuden tieteenalan syntyyn rahoittamalla alan tutkimusta. Tuona vuosikymmenenä julkaistiin niin alan termejä määritelleitä raportteja, josta esimerkkinä vuonna 1957 julkaistu AGREE-raportti, kuin tieteellisiä julkaisuja, kuten ruotsalaisen fyysikon Waloddi Weibullin vuonna 1951 julkaisema artikkeli, joka esitteli myöhemmin hänen mukaansa nimetyn jakauman. (Saleh & Marais 2006, 249−252)

Luotettavuustekniikan tutkimus oli vilkasta 1960-luvulla useiden luotettavuutta vaativien teknisten hankkeiden myötä. Tällaisia hankkeita olivat esimerkiksi mannertenväliset ballistiset ohjukset, sekä kuulennot. Alan kehitys alkoi hidastua 1970-luvulla. (Saleh & Marais 2006, 252−254)

Tässä työssä on käytetty lähteenä neljää luotettavuustekniikan jakaumiin liittyvää yleisluontoista teosta. Näistä teoksista kolme, Elsayedin (2012), O'Connorin (2016) ja Phamin (2006) teokset, on julkaisu tällä vuosituhannella ja neljäs, eli Galambosin ja Kotzin teos (1978), on hieman varhaisempi. Tämän lisäksi apuna on käytetty useita yksittäisiä jakaumaa koskevia teoksia. Lähes kaikki käytetyt teokset ovat melko uusia, poikkeuksena Haightin teos (1967), jossa kuvaillaan Poisson-jakauman taustaa.

3 WEIBULL-JAKAUMA

Weibull-jakauma, joka tunnetaan myös nimellä Weibull-malli, on luotettavuusteknii- kassa käytetty jatkuva jakauma, joka sopii kuvaamaan tilanteita, joissa hasardifunktio ei ole vakio tai lineaarinen (Elsayed 2012, s. 22). Weibull-jakauma on tunnetuin luotetta- vuustekniikan jakaumista, ja siitä on viime vuosikymmeninä kirjoitettu useita eri artikke- leita. Weibull-jakauma on läheistä sukua eksponenttijakaumalle. Näiden kahden ja- kauman merkittävin ero on se, että Weibull-jakauma on muistillinen jakauma ja ekspo- nenttijakauma muistiton. Tämä tarkoittaa, että Weibull-jakauma soveltuu tilanteisiin, joissa vaurio tapahtuu kulumisen tai väsymisen seurauksena. Eksponenttijakauma puo- lestaan sopii tilanteisiin, joissa vaurio ei johdu näistä syistä. (Pham 2006, s. 12−14)

Weibull-jakaumia on useita erilaisia. Weibull-jakauman perusmallia kutsutaan kaksipa- rametriseksi Weibull-jakaumaksi. Sen pohjalta on kehitetty useita eri jakaumia, joita kut- sutaan myös Weibull-jakaumiksi. Nämä useat eri Weibull-jakaumat jaetaan seitsemään eri tyyppiin. (Prabhakar Murthy et al. 2004, s. 257−258)

Kaksiparametrista Weibull-jakaumaa kuvaava hasardifunktio voidaan esittää yhtälönä

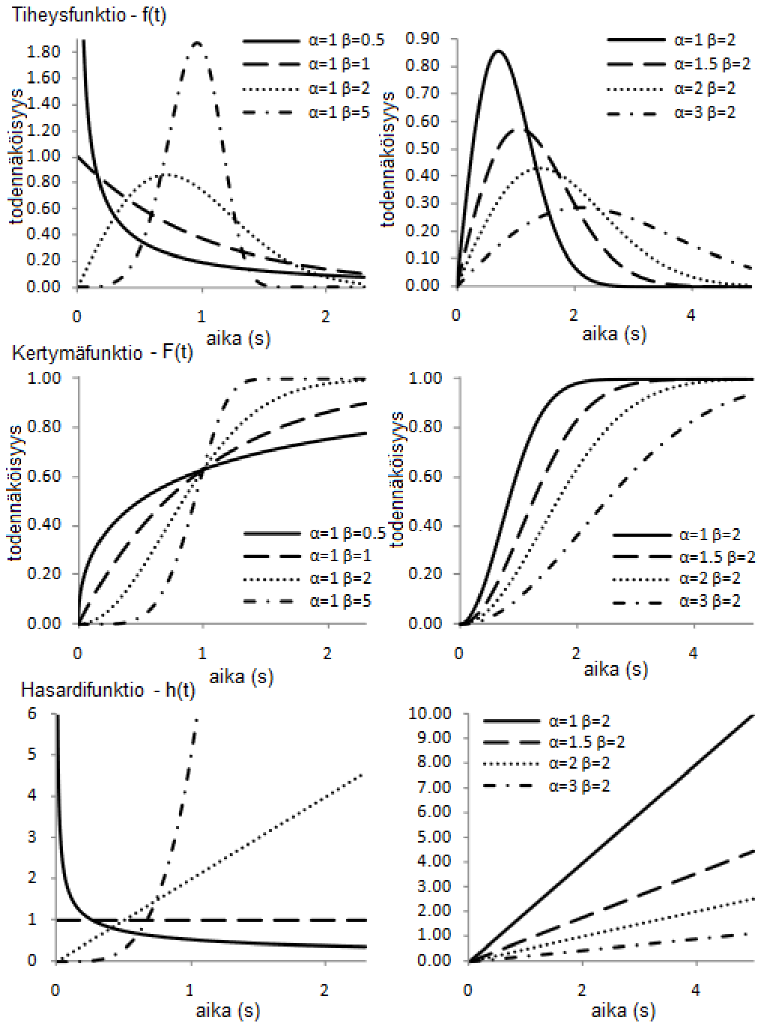
$$h(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}, \alpha > 0 \; ja \; \beta > 0, \tag{3.1}$$

jossa β on jakauman muotoparametri, α karakteristinen elinikä eli skaalausparametri ja t on tutkittavan komponentin tai laitteen käyttöaika (O'Connor et al. 2016, s. 60). Näille parametreille pätee $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$. Kuvasta 3.1 huomataan, että eri parametrien α ja β arvoilla saadaan hasardifunktion kuvaajalle useita erilaisia muotoja, esimerkiksi tasainen suora, nouseva suora tai puolikas paraabeli. Jakauman tiheysfunktiota puolestaan kuvaa yhtälö

$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}. \tag{3.2}$$

Kuva 3.1 havainnollistaa tiheysfunktiota eri parametrien arvoilla. Tiheysfunktiolle voi- daan kuvasta havaita kaksi muotoa; vähenevä funktio, sekä funktio, joka on todennäköi- syyden maksimiarvoon asti kasvava, ja sen jälkeen vähenevä. Tiheysfunktiosta voidaan johtaa Weibull-jakauman kertymäfunktio, joka puolestaan voidaan esittää yhtälönä

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}. \text{ (Elsayed 2012, s. 22−23)} \tag{3.3}$$



Kuva 3.1 *Weibull-jakaumaa kuvaavat funktiot eri parametrien arvoilla (O'Connor et al. 2016, s. 59).*

Weibull-jakauman keskiarvo on

$$\mu = \alpha\Gamma(1 + \frac{1}{\beta}), \tag{3.4}$$

jossa esiintyy gamma-funktio, joka määritellään

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt, \tag{3.5}$$

jossa $\alpha > 0$. Jakauman varianssi on

$$\sigma^2 = \alpha^2[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)]. \tag{3.6}$$

Jakauman vinouskerroin on

$$S_c = \frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{\beta}\right)\alpha^3 - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3} \tag{3.7}$$

ja sen huipun kaarevuuskerroin on

$$K_c = \frac{-6\Gamma_1^4 + 12\Gamma_1^2\Gamma_2 - 3\Gamma_2^2 - 4\Gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_4}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^2}, \tag{3.8}$$

jossa

$$\Gamma_i = \Gamma(1 + \frac{i}{\beta}) . \tag{3.9}$$

Huomataan siis, että jakauman tunnusluvut riippuvat molemmista jakauman parametreista, pois lukien huipun kaarevuuskerroin, joka riippuu ainoastaan muotoparametrista β. (O'Connor et al. 2016, s. 61)

3.1 Taustaa

Weibull-jakauman kehittäjänä pidetään ruotsalaista fyysikkoa Waloddi Weibullia, jonka mukaan jakauma on myös nimetty. Weibull käytti jakaumaa ensimmäisen kerran apuna mallinnuksessa tutkiessaan eri materiaalien murtolujuuksia vuonna 1939. Vuonna 1951 hän julkaisi artikkelin, jossa hän esitteli jakauman mahdollista yleisempää käyttöä. (Weibull Distributions and Their Applications 2006, s. 64)

Vaikka jakauma on nimetty Weibullin mukaan, ei hän kuitenkaan ole ainoa sen kehitykseen vaikuttanut henkilö. Ainakin henkilö nimeltä Fréchet mainitaan myös usein yhtenä jakauman kehitykseen suuresti vaikuttaneena henkilönä, ja Weibull-jakaumaa kutsutaan jopa joskus Fréchet-jakaumaksi. Tästä huolimatta Weibullin ansiona pidetään ainakin parametrien lisäämistä jakaumaan, mikä teki siitä käyttökelpoisen. (Weibull Distributions and Their Applications 2006, s. 64)

3.2 Käyttö

Weibull-jakaumaa käytetään laajasti teollisuudessa, sillä se soveltuu tilanteisiin, joissa vikataajuus saattaa olla nouseva, laskeva tai vakio (Nanasi 2014, s. 76). Kuten muitakin luotettavuustekniikan jakaumia, käytetään Weibull-jakaumaa lähinnä eliniän mallinnuksessa. Weibull-jakaumista on kehitetty useita sovelluksia eri teollisuudenaloja ja tuotteita varten. Näitä ovat esimerkiksi lasin murtumislujuus, putkien pistekorroosio, metallien tartuntakuluminen, sekä erilaisten materiaalien, kuten hiilikuitujen tai hauraiden aineiden pettäminen. Lisäksi Weibull-jakaumaa käytetään yleisesti edustamaan väsymisikää, kuulalaakerin elinikää ja tyhjiöputken ikää (Pham 2006, s. 12–14). (Weibull Distributions and Their Applications 2006, s. 74–75)

Weibull-jakaumalla on lukuisia sovelluksia myös luotettavuustekniikan ulkopuolella. Näistä sovelluksista on kirjoitettu tuhansia julkaisuja. Sitä käytetään esimerkiksi geotieteissä tuulen nopeuden analysointiin tai tulvien esiintymistiheyden selvittämiseen. Tämän lisäksi Weibull-jakaumaa käytetään muun muassa sosiaalitieteissä työttömyyden keston ennustamiseen ja ympäristötieteissä ympäristön radioaktiivisuutta tutkittaessa. (Weibull Distributions and Their Applications 2006, s. 75−76)

Weibull-jakauman muoto- ja skaalausparametrien määrittämiseksi on kehitetty useita eri menetelmiä. Näitä ovat esimerkiksi pienimmän neliösumman menetelmä, painotettu pienimmän neliösumman menetelmä ja suurimman uskottavuuden estimointi. (Yu & Peng 2013, s. 194; Alizadeh et al. 2015, s. 373)

Käytännössä parametrien valinnan hoitaa kuitenkin lähes aina tietokoneohjelma. Weibull-jakauman matemaattisessa analysoinnissa voidaan käyttää apuna erilaisia tietokoneohjelmia. Tämän lisäksi Weibull-jakauman analysointiin on kehitetty jopa useita täysin omia ohjelmistoja, kuten Weibull++ ja WeibullPro. (Weibull Distributions and Their Applications 2006, s. 76)

4 EKSPONENTTIJAKAUMA

Eksponenttijakauma, eli eksponenttimalli, on jatkuva jakauma, joka soveltuu tilanteisiin, joissa hasardifunktio on aluksi vakio, mutta alkaa sitten nousta. Käytännön sovelluksissa tämä tarkoittaa esimerkiksi komponentteja, jotka toimivat kunnolla normaaleissa olosuhteissa, mutta alkavat sitten vikaantua jonkun toissijaisen syyn, kuten ylikuumenemisen tai murtuman vaikutuksesta. Eksponenttijakauma on yksi yksinkertaisimmista tilastollisista jakaumista. Se on käytännössä Weibull-jakauma, jossa muotoparametri β=1. Eksponenttijakaumien perheeseen kuuluu useita eri jakaumia, joilla on eri sovelluksia. Yksimuuttujainen eksponenttijakauma on käytetyin jakauma luotettavuuden mallintamisessa ja elinikätestauksessa (Ahsanullah 2010, s. vii). (Nadarajah & Kotz 2006, s. 689; Ahsanullah 2010, s. 1; Elsayed 2012, s. 28)

Eksponenttijakauma on muistiton jakauma, mikä tarkoittaa, että se ei ota huomioon tutkittavan kohteen kulumista tai elinikää. (Pham 2006, s. 9−10)

Eksponenttijakauman hasardifunktio on

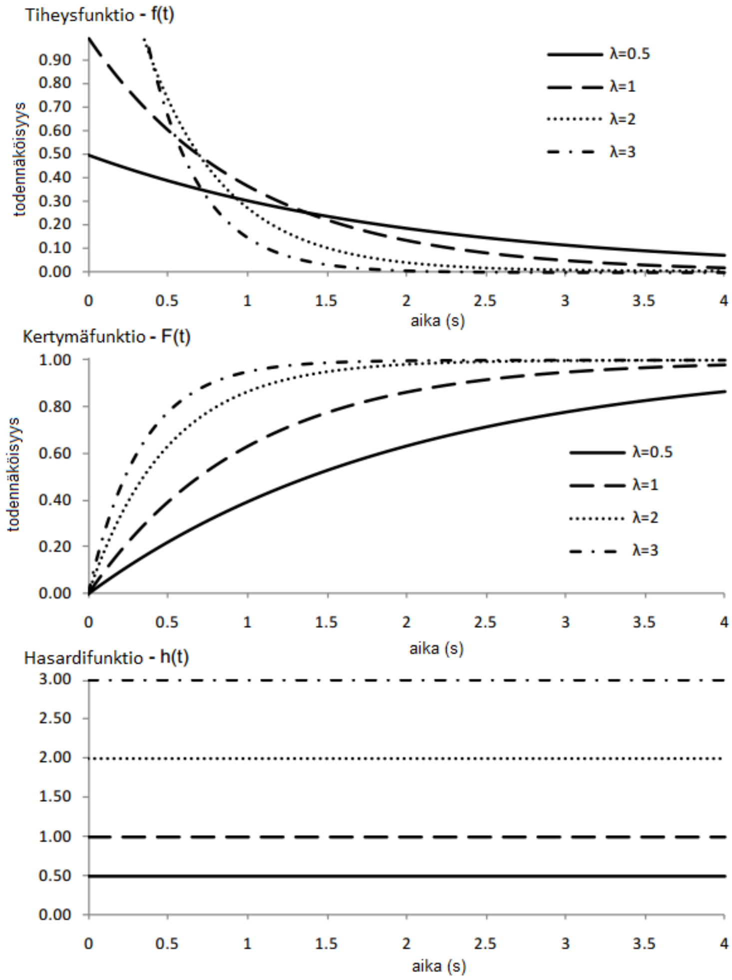
$$h(t) = \lambda, \tag{4.1}$$

jossa λ on skaalausparametri, jolle pätee $\lambda > 0$. Se saadaan aineiston hetkellisestä vikataajuudesta ja on aina vakio, joka ilmenee myös kuvassa 4.1. Jakaumaa kuvaava tiheysfunktio puolestaan on

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \tag{4.2}$$

joka tunnetaan myös nimellä Gomperenz-jakauma. Kuvassa 4.1 on esitetty eksponenttijakauman kertymäfunktio eri parametrin λ arvoilla. Funktio on kaikissa kuvatuissa tapauksissa vähenevä, eli suurin vikaantumistodennäköisyys saavutetaan ajassa t=0. Eksponenttijakauman kertymäfunktio on puolestaan muotoa

$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. (Elsayed 2012, s. 28; O'Connor et al. 2016, s. 42) (4.3)



__Kuva 4.1__ Eksponenttijakaumaa kuvaavat funktiot eri parametrien arvoilla (O'Connor et al. 2016).

Eksponenttijakauman keskiarvo on $\frac{1}{\lambda}$ ja varianssi $\frac{1}{\lambda^2}$. Sen vinouskerroin on 2 ja huipun kaarevuuskerroin 6. Tämä tarkoittaa, että sen symmetrisyys tai huipun terävyys eivät ole riippuvaisia skaalausparametrin λ arvosta, mutta keskiarvo ja varianssi ovat. (O'Connor et al. 2016, s. 42)

4.1 Tausta

Mahdollisesti ensimmäinen maininta eksponenttijakaumasta löytyy Ludwig Boltzmannin vuonna 1868 julkaisemasta teoksesta *Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten* (suom. Tutkimuksia elävän voiman tasapainosta liikkuvien materiaalisten pisteiden välissä). Siinä, sekä William Allen Whitworthin vuoden 1886 *Choice and chance* (suom. Valinta ja todennäköisyys) teoksessa, käsitellään Poisson- ja eksponettijakaumia, sekä näiden välistä yhteyttä. (Galambos & Kotz 1978, s. 2–3)

Vuonna 1931 T. Gondo kutsui teoksessaan *Biometrika* eksponenttijakaumaa ”Pearsonin X-tyypin käyräksi”. Vuonna 1937 P.V. Sukhatme esitti *Annals of Eugenics* -lehdessä eksponenttijakaumaa vaihtoehdoksi normaalijakaumalle tapauksiin, joissa ”vaihtelun tyyppi aineistossa tunnetaan, ja se on kaukana normaalista”. Hän käytti eksponenttijakaumasta ilmausta ”kahden vapausasteen χ^2-jakauma”. (Galambos & Kotz 1978, s. 2−3)

Yleisemmin eksponenttijakaumaa alettiin tutkia 1950-luvulla sen jälkeen, kun Waloddi Weibull oli julkaissut Weibull-jakaumaa koskevan artikkelinsa. Merkittäviä eksponenttijakaumaan liittyviä julkaisuja tuolta ajalta ovat D.J. Davisin vuoden 1953 artikkeli *An analysis of some failure data* sekä B. Epsteinin ja M. Sobelin *Life testing*, joista erityisesti jälkimmäinen käynnisti eksponenttijakaumaan liittyvän tutkimuksen. (Galambos & Kotz 1978, s. 2−3)

Eksponenttijakauman kehityksen varsinaiset päävaiheet ajoittuvat 1960- ja 1970-luvuille. Tärkeitä jakauman kehitykseen vaikuttaneita henkilöitä ovat muun muassa T.S. Ferguson, Tanis, A.P. Basu, G.B. Crawford, Govindarajulu ja Chan. Heidän vuosina 1964–1967 julkaisemansa tutkimukset luovat perustan eksponenttijakaumalle. (Ahsanullah 2010, s. 65−66)

4.2 Käyttö

Eksponenttijakauma sopii käytettäväksi elinikämallinnukseen tilanteissa, joissa vaurio tapahtuu yllättäen, eikä vauriota edellä minkäänlaista kulumista tai väsymistä. Tällä tavalla rikkoontuvia laitteita ovat esimerkiksi jotkin sähkölaitteet, kuten kondensaattorit ja mikropiirit. Tämän lisäksi eksponenttijakauma sopii satunnaisen tekijän aiheuttamien yllättävien vikojen mallintamiseen. Tällainen vika on esimerkiksi terävän esineen päältä ajamisesta johtuva renkaan puhkeaminen. Tämän lisäksi eksponenttijakauma sopii homogeenisen Poisson-prosessin mallintamiseen. (O’Connor et al. 2016, s. 45−46)

5 LOG-NORMAALIJAKAUMA

Jos komponentin vikaantuminen johtuu yksittäisen puolijohteen vikaantumisesta, tai joukosta tiukasti toisiinsa liittyviä vikaantumismekanismeja, on yleisin tapausta kuvaamaan käytetty jakauma log-normaalijakauma, joka tunnetaan myös nimellä log-normaali malli. Tämä jatkuva jakauma soveltuu myös nopeutetuista elinikätesteistä saadusta datasta ennustamiseen. Nimensä mukaisesti log-normaalijakauman yhtälöissä esiintyy luonnollinen logaritmi. Log-normaalijakauma saadaan, kun normaalijakauman satunnaismuuttuja korvataan satunnaismuuttujan logaritmilla. (Elsayed 2012, s. 32)

Log-normaalijakaumaa kuvaava tiheysfunktio on muotoa

$$f(t) = \frac{1}{\sigma_N t\sqrt{2\pi}} exp[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu_N}{\sigma_N}\right)^2], \tag{5.1}$$

jossa μ_N on skaalausparametri, jolle pätee $-\infty < \mu_N < \infty$. Se saadaan normaalijakautuneen $\ln(x)$:n keskiarvosta kaavalla

$$\mu_N = \ln(\frac{\mu^2}{\sqrt{\sigma^2 + \mu^2}}). \tag{5.2}$$

Vastaavasti σ_N on muotoparametri, jolle pätee $\sigma_N > 0$. Se saadaan puolestaan normaalijakautuneen $\ln(x)$:n keskihajonnasta kaavalla

$$\sigma_N^2 = \ln(\frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu^2}). \tag{5.3}$$

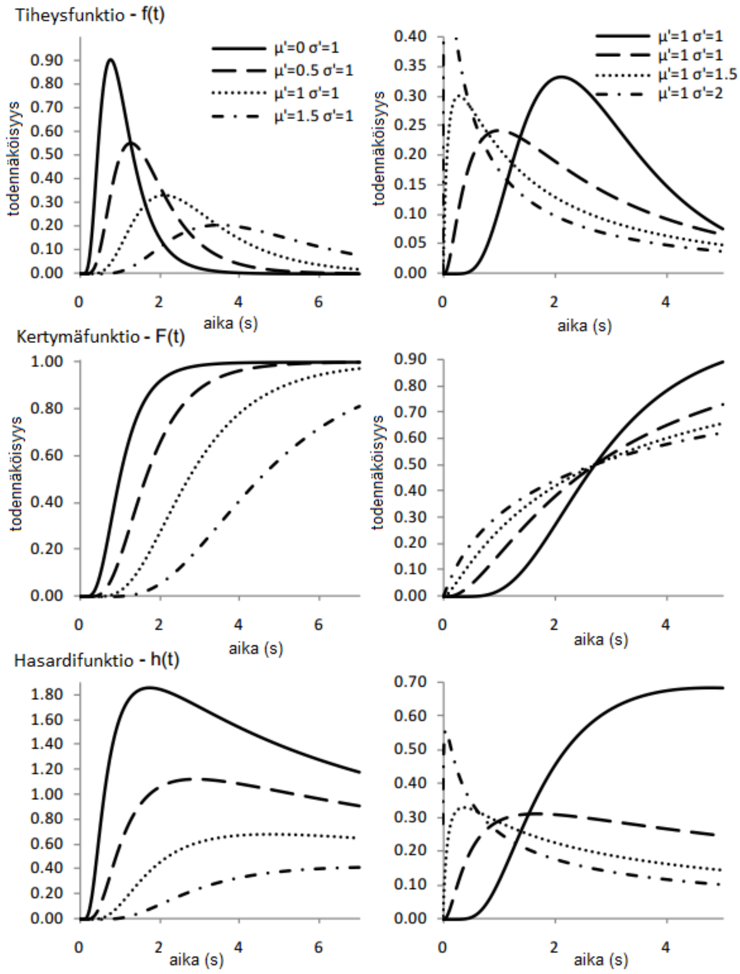
Tiheysfunktion kuvaajia eri parametrien arvoilla esitetään kuvassa 5.1. Kuvasta huomataan, että tiheysfunktion kuvaajassa on yksi huippu, jonka molemmin puolin funktio on joko kasvava tai vähenevä. Jakaumaa kuvaava kertymäfunktio on muotoa

$$F(t) = \Phi(\frac{\ln t - \mu_N}{\sigma_N}), \tag{5.4}$$

jossa funktiolla $\Phi(x)$ tarkoitetaan standardoidun normaalijakauman kertymäfunktiota. Log-normaalijakauman hasardifunktio on

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\phi[\frac{\ln t - \mu_N}{\sigma_N}]}{\sigma_N t(1 - \Phi(\frac{\ln t - \mu_N}{\sigma_N}))}, \tag{5.5}$$

eli se saadaan muodostettua tiheysfunktion ja luotettavuusfunktion avulla. Tarkastelemalla kuvaa 5.1 huomataan, että log-normaalijakauman hasardifunktio voi olla parametrien arvoista riippuen joko aidosti kasvava, tai siinä voi olla tiheysfunktion tavoin yksi huippu. (Elsayed 2012, s. 32–34; O'Connor et al. 2016, s. 50–51)



Kuva 5.1 *Log-normaalijakaumaa kuvaavat funktiot eri parametrien arvoilla (O'Connor et al. 2016, s. 49).*

Log-normaalijakauman keskiarvo on

$$\mu = e^{\mu_N + \frac{\sigma_N{}^2}{2}} \tag{5.6}$$

ja varianssi

$$\sigma^2 = e^{2\mu_N + \sigma_N{}^2}(e^{\sigma_N{}^2} - 1). \tag{5.7}$$

Jakauman vinouskerroin on

$$S_c = (e^{\sigma^2} + 2)\sqrt{e^{\sigma^2} - 1}. \tag{5.8}$$

ja sen huipun kaarevuuskerroin on

$$K_c = e^{4\sigma_N{}^2} + 2e^{3\sigma_N{}^2} + 3e^{2\sigma_N{}^2} - 3. \tag{5.9}$$

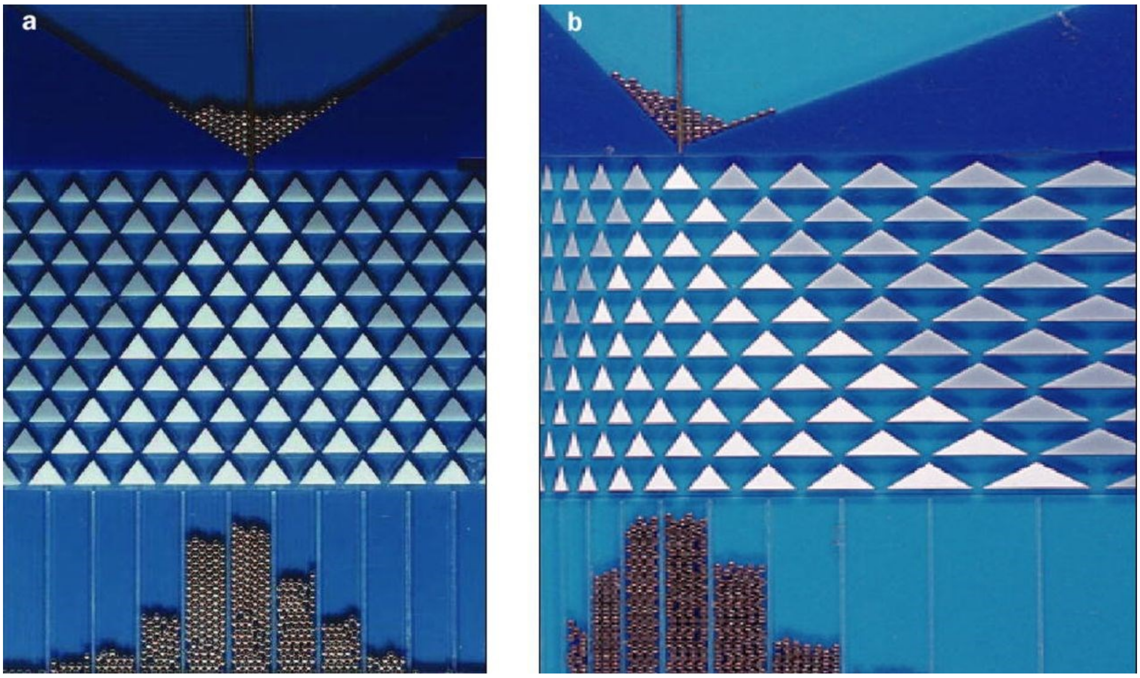
Jakauman parametrit riippuvat molemmat sekä aineiston keskiarvosta, että varianssista, joten tästä seuraa, että keskiarvo ja varianssi saadaan laskettua, kun parametrit tunnetaan.

Vinouskerroin riippuu ainoastaan alkuperäisen aineiston varianssista ja huipun kaarevuus sekä varianssista että keskiarvosta muotoparametrin kautta. (Pham 2006, s. 11– 12; O'Connor et al. 2016, s. 51)

5.1 Tausta

Log-normaalijakauma on käytännössä normaalijakauman versio, jossa satunnaismuuttujan logaritmi on normaalijakautunut. Graafisessa esityksessä tämä ero tarkoittaa, että log-normaalijakauma on vino, toisin kuin normaalijakauma, joka on symmetrinen. Log-normaalijakauman syntyyn vaikuttivat useat eri henkilöt 1800-luvulla ja 1900-luvun alkupuolella. Näitä olivat esimerkiksi Weber vuonna 1834, Fechner vuosina 1860 ja 1897, Galton vuonna 1879, McAlister vuonna 1879, Kapetyn vuonna 1903, Gibrat vuonna 1931 ja Gaddum vuonna 1945. (Limpert et al. 2001, s. 344)

Heistä Sir Francis Galton (1822 – 1911), englantilainen matemaatikko, kehitti normaalijakauman ja log-normaalijakauman eron havainnollistamiseksi laitteen, jota kutsutaan Galtonin laudaksi. Galtonin laudan toimintaperiaate ilmenee kuvasta 5.2. Siinä partikkeleita tiputetaan alaspäin lautaa, jonka jokaisella tasolla ne osuvat kolmion kärkeen ja ohittavat tämän joko oikeaa tai vasenta sivua pitkin. Todennäköisyys vasemmalta ja oikealta puolelta ohittamiselle on yhtä suuri. Ensimmäisessä laudassa kolmiot ovat yhtä suuria, toisessa kolmion kantojen pituus kasvaa vasemmalta oikealle. Ensimmäisessä laudassa alas pudonneet partikkelit muodostavat normaalijakauman ja toisessa log-normaalijakauman. Galton havainnollisti tällä vinon jakauman syntyä. (Limpert et al. 2001, s. 342 – 343)



Kuva 5.2 *Galtonin lauta (Limpert et al. 2001, s. 343).*

Käytännön tapauksissa tämä ero johtuu siitä, että normaalijakautuneissa suureissa satunnaisuus on summaavaa ja log-normaalijakautuneissa suureissa moninkertaistavaa. Tämä ero aiheuttaa sen, että normaalijakauma ja log-normaalijakauma sopivat kuvaamaan erilaisia aineistoja. (Limpert et al. 2001, 341 – 342)

5.2 Käyttö

Useilla eri tieteenaloilla hyödynnetään log-normaalijakaumaa. Tällaisia aloja ovat esimerkiksi biologia, ekologia, geologia ja meteorologia. Tämän lisäksi jakaumaa käytetään rahoitusalalla, taloustieteissä, riskianalyyseissä, sekä astrofysiikassa ja kosmologiassa. Yksi esimerkki jakauman hyödyntämisestä astrofysiikassa on Parravano et. al. tekemä tutkimus (2012). (Toulias & Kitsos 2013, s. 1)

Yleisesti ottaen log-normaalijakauma soveltuu hyvin monenlaisen datan analysointiin, sillä se on joustava, ja se voidaan empiirisesti sovittaa kuvaamaan monenlaista vikadataa (Pham 2006, s. 11−12). Sitä käytetään yleisesti tähän tarkoitukseen, erityisesti sähkölaitteisiin, sekä väsymiseen ja murtumiseen liittyvän datan analysoinnissa. Lisäksi jakauma sopii sellaisten virheiden analysointiin, joilla on kerrannaisvaikutusta. Tällainen tapaus on esimerkiksi komponentin hajoaminen väsymishalkeaman vuoksi. Tämän lisäksi jakauma sopii hyvin korjausaikojen mallintamiseen. (O’Connor et al. 2016, s. 57)

Log-normaalijakauma voidaan sopivia oletuksia käyttäen johtaa monista vikaantumismekanismeista, kuten korroosiosta, vaeltamisesta (englanniksi migration), särön kasvusta sekä kemiallisista reaktioista ja prosesseista johtuvista vioista. Tämä ei tietenkään tarkoita, että log-normaalijakauma olisi kaikissa edellä mainituissa tapauksissa sopivin malli ilmiön kuvaamiseen, mutta monissa tapauksissa näin on. Mekaanisessa luotettavuustekniikassa log-normaalijakaumaa voidaan soveltaa esimerkiksi korjattavien järjestelmien, betoniputkien puristuslujuuden, kuitujen vetolujuuden tai vikadatan epäluotettavuuden analysointiin. (Pham 2006, s. 11−12)

Jakauman analysointi ja parametrien määrittäminen on helppoa tehdä tietokoneella eri ohjelmistoja käyttäen, sillä log-normaalijakauma on hyvin lähellä normaalijakaumaa, joka on yksi tunnetuimpia ja yleisimmin käytetyimpiä jakaumia. (Pham 2006, s. 11−12)

6 GAMMA-JAKAUMA

Gamma-jakauma, jota kutsutaan myös Gamma-malliksi, on jatkuva jakauma. Se soveltuu kuvaamaan tilanteita, joissa järjestelmä vikaantuu sen jälkeen, kun tietty määrä toisistaan riippuvia osia on vikaantunut. Tämän lisäksi se kuvaa tilanteita, joissa komponentti hajoaa useassa eri vaiheessa. (Elsayed 2012, s. 35)

Gamma-jakaumaa kuvaa tiheysfunktio

$$f(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda t}, \tag{6.1}$$

jossa λ on skaalausparametri, ja k on muotoparametri. Parametreille pätee $\lambda > 0$ ja $k > 0$. Skaalausparametri kuvaa vikojen esiintymistaajuutta aineistossa. Se saadaan kaavasta λ=1/θ, jossa θ tarkoittaa keskimääräistä vikojen välistä aikaa. Muotoparametri k puolestaan tarkoittaa joko komponentin hajoamiseen vaadittavien hajonneiden osien määrää, tai hajoamiseen vaikuttavien vaiheiden määrää. Tiheysfunktion kuvaajia eri parametrien arvoilla on esitetty kuvassa 6.1. Kuvasta huomataan, että tiheysfunktio on joko laskeva, tai sillä on yksi huippu. Tiheysfunktio voidaan myös välillä esittää muodossa, jossa muuttujat ovat θ ja k. (O'Connor et al. 2016, s. 100).

Funktio $\Gamma(\gamma)$ on Gamma-funktio, joka määritellään

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^\infty t^{\gamma-1} e^{-t} dt, \tag{6.2}$$

jossa γ>0 (Pham 2006, s. 13).

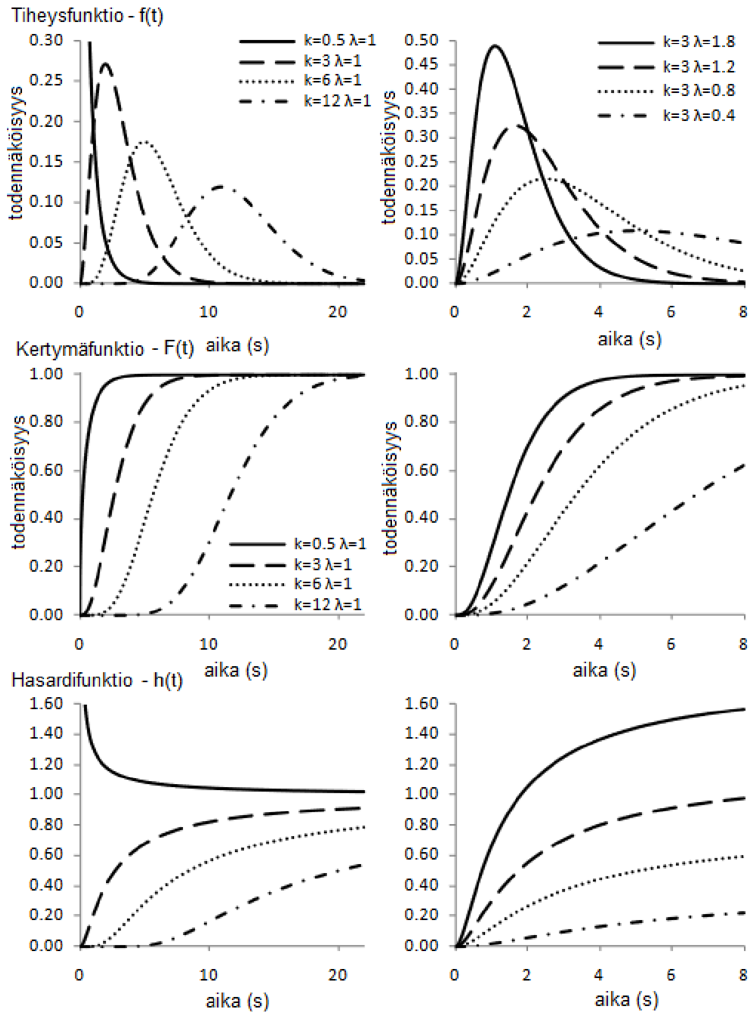
Gamma-jakaumaa kuvaava luotettavuusfunktio on puolestaan muotoa

$$R(t) = e^{-\frac{t}{\lambda}} \sum_{i=0}^{\gamma-1} \frac{\frac{t}{\lambda}^i}{i!}. \text{ (Elsayed 2012, s. 35–36)} \tag{6.3}$$

Tiheysfunktion ja luotettavuusfunktion avulla voidaan muodostaa Gamma-jakauman hasardifunktio. Se on

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\frac{t^{\gamma-1}}{\theta^\gamma \Gamma(\gamma)} e^{-\frac{t}{\theta}}}{e^{-\frac{t}{\lambda}} \sum_{i=0}^{\gamma-1} \frac{\frac{t}{\lambda}^i}{i!}}. \tag{6.4}$$

Kuvassa 6.1 esitetyistä hasardifunktion kuvaajista huomataan, että hasardifunktio on joko nouseva tai laskeva. (Pham 2006, s. 14)



Kuva 6.1 *Gamma-jakaumaa kuvaavat funktiot eri parametrien arvoilla (O'Connor et al. 2016).*

Gamma-jakauman keskiarvo on $\frac{k}{\lambda}$ ja keskihajonta on $\frac{k}{\lambda^2}$ (Pham 2006, s. 14). Sen vinouskerroin on $\frac{2}{\sqrt{k}}$ ja huipun kaarevuuskerroin on $\frac{6}{k}$ (O'Connor et al. 2016, s. 101). Tämä tarkoittaa, että jakauman keskiarvo ja varianssi ovat riippuvaisia kummastakin parametrista, mutta vinouskerroin ja huipun kaarevuuskerroin vain muotoparametrista k.

Mikäli eri aikaväleistä T_n koostuva joukko on eksponenttijakautunut parametrillä λ, on vastaavan joukon alkioista muodostettu summa $\sum_{n=1}^{k} T_n$ Gamma-jakautunut parametreillä k ja λ. Eksponenttijakaumalla ja Gamma-jakaumalla on siis yhteys.

6.1 Tausta

Itävaltalais-armenialainen matemaatikko Emil Artinin julkaisi vuonna 1931 monografin, jossa hän esittelee jakaumaa, joka ei tuolloin ollut vielä kovin arvostettu matemaatikkojen parissa. Tämä monografi, nimeltään *Einführung in die Theorie der Gammafunktion* (suom. Johdatus Gamma-funktion teoriaan), julkaistiin englanniksi käännettynä vuonna

1964 Yhdysvalloissa nimellä *The Gamma Function* (suom. Gamma-funktio). Kyseinen teos on yksi tärkeimpiä Gamma-jakauman syntyyn vaikuttaneita teoksia. (O'Connor et al. 2016, s. 105)

6.2 Käyttö

Gamma-jakaumalla on monenlaisia sovelluksia luotettavuustekniikassa. Sitä voidaan käyttää yleisesti elinikämallinnukseen ja järjestelmän rikkoutumisen mallintamiseen järjestelmille, joissa on jokin määrä varajärjestelmiä. Tästä huolimatta Gamma-jakaumaa ei kuitenkaan käytetä kovin yleisesti elinikämallinnuksessa (Pham 2006, s. 14). Gamma-jakauma on myös ensisijainen jakauma Bayesiläisessä analyysissa. Tämän lisäksi sitä käytetään tilanteissa, joissa vioittunut komponentti, jonka vikaantumisaika on eksponenttijakautunut, korvataan välittömästi vioittumisen jälkeen uudella. Gamma-jakaumaa käytetään vikataajuutta kuvaavana funktiona komponenteille, joiden vikaantumista kuvaava jakauma on vino (Pham 2006, s. 13). Jakaumaa voidaan myös käyttää homogeenisessa Poisson-prosessissa, jossa hyödynnetään riskien arviointiin liittyvää riskiteoriaa tai jonoteoriaa. (O'Connor et al. 2016, s. 105)

7 POISSON-JAKAUMA

Poisson-jakauma on binomijakaumasta johdettu diskreetti jakauma. Sillä voidaan selvittää todennäköisyys sille, että jokin tapahtuma tapahtuu enintään k kertaa ajassa t. Tällä voidaan tarkoittaa systeemissä tai joukossa komponentteja ilmenevää vikaa, tai tuotantoprosessissa olevien viallisten tuotteiden lukumäärää. (Elsayed 2012, s. 66–67)

Poisson-jakaumaa kuvaa tiheysfunktio

$$f(k) = \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} \quad \mathrm{k} = 0,1,2, \ldots, \tag{7.1}$$

jossa μ on muotoparametri, jolle pätee $\mu > 0$. Se saadaan jossakin tietyssä ajanyksikössä odotettujen vikojen määrästä kaavalla $\mu = \lambda t$, jossa t on tutkittava tarkasteltavan ajanjakson pituus ja λ vikataajuus. Kokonaislukumuuttuja k tarkoittaa esimerkiksi viallisia tuotteita tutkittaessa viallisten tuotteiden lukumäärää, jonka todennäköisyys halutaan selvittää. Kuvassa 7.1 esitetään Poisson-jakauman kertymäfunktio eri parametrin μ arvoilla. Kaikissa tapauksissa vikaantumistodennäköisyys saavuttaa maksimiarvonsa jakauman keskellä (ei alussa tai lopussa). (Elsayed 2012, s. 66–67; O'Connor et al. 2016, s. 166)

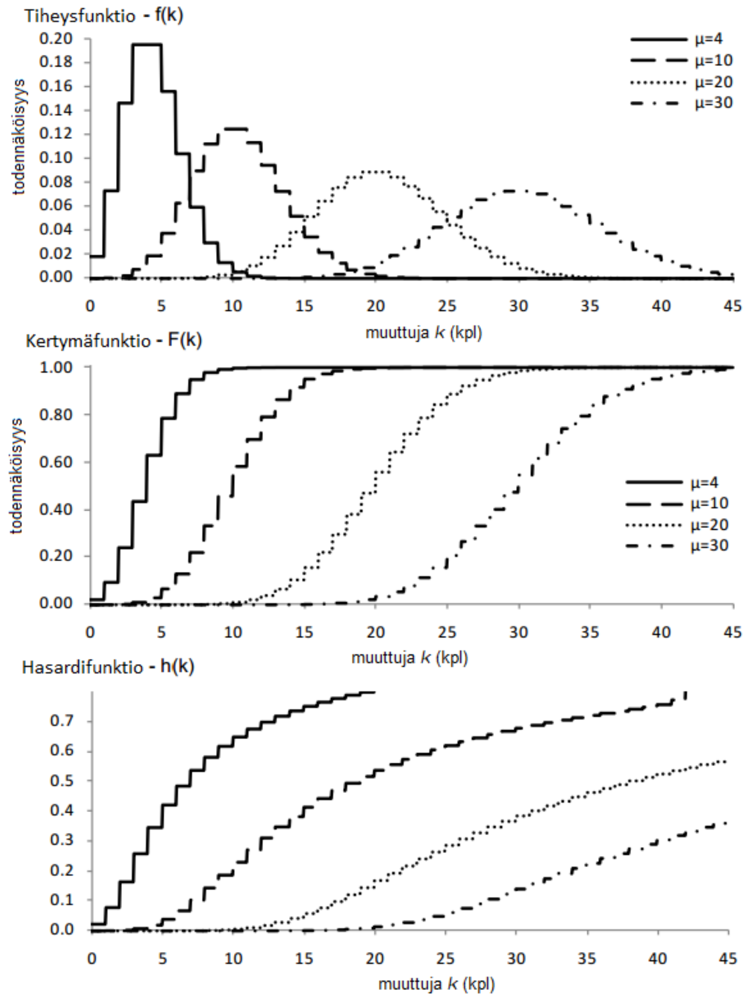
Poisson-jakauman kertymäfunktio on

$$F(k) = e^{-\mu} \sum_{j=0}^{k} \frac{\mu^j}{j!}, \tag{7.2}$$

jossa siis summataan muuttujan k verran termejä yhteen. Jakauman hasardifunktio on muotoa

$$h(k) = \left(1 + \frac{k!}{\mu}\left(e^{\mu} - 1 - \sum_{j=1}^{k} \frac{\mu^j}{j!}\right)\right)^{-1}. \tag{7.3}$$

Kuvasta 7.1 havaitaan, että hasardifunktio on kasvava riippumatta parametrin μ arvosta. (O'Connor et al. 2016, s. 166)



Kuva 7.1 *Poisson-jakaumaa kuvaavat funktiot eri parametrin μ arvoilla (O'Connor et al. 2016, s. 165).*

Poisson-jakaumassa sekä keskiarvo, että varianssi ovat sama kuin parametrin λ arvo, eli vikataajuus. Jakauman vinouskerroin saa arvon $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ ja huipun kaarevuuskerroin arvon $\frac{1}{\mu}$. Ne ovat täten riippuvaisia vikataajuudesta ja tarkastelujakson pituudesta. (O'Connor et al. 2016, s. 166–167)

7.1 Tausta

Poisson-jakauma on hyvin vanha jakauma. Varhaisin jakaumaan liittyvä teos on ranskalaisen tiedemiehen Simeon Denis Poissonin (1781–1840) vuonna 1837 julkaisema *Recherches sur la probabilite* (suom. Tutkimuksia todennäköisyydestä), jossa esitellään matematiikkaan ja todennäköisyyslaskentaan liittyviä asioita havainnollistettuna tuomioistuimiin liittyvillä esimerkeillä. Joidenkin lähteiden mukaan Poisson-jakauman olisi keksinyt ranskalainen matemaatikko Abraham de Moivre (1667–1754) jo vuonna 1718. (Haight 1967, s. 113)

Poisson-jakaumaan ei 1800-luvulla kiinnitetty suurta huomiota. Asia muuttui, kun todennäköisyyden ja tilastojen välinen yhteys keksittiin 1900-luvun alussa useiden kuuluisien matemaatikkojen toimesta. Tämä havainto tehtiin ensin normaalijakaumalle. Poisson-jakaumalle tämän yhteyden keksi venäläis-puolalainen ekonomisti ja tilastotieteilijä Ladislaus von Bortkiewicz (1868−1931). Hänen tärkein Poisson-jakaumaan liittyvä teoksensa on vuonna 1898 julkaistu *des Gesetz der kleinen Zahlen* (suom. Pienten lukujen laista). (Haight 1967, s. 114−116)

Molemmat mainitut henkilöt ovat siis vaikuttaneet suuresti Poisson-jakauman syntyyn. Voidaankin sanoa, että Poisson kehitti matemaattisen esityksen, josta Bortkiewicz loi varsinaisen Poisson-jakauman. (Haight 1967, s. 115)

7.2 Käyttö

Poisson-jakaumaa voidaan käyttää mallinnettaessa homogeenista Poisson-prosessia tilanteessa, jossa on selvitettävä jakauma, kun vikojen määrä on jokin arvo k. Poisson-jakaumaa käytetään uusiutumisteoriassa laskentafunktiona. Ei-homogeenisten komponenttien ikääntymistä voidaan mallintaa sen avulla käyttämällä ajasta riippuvaista vikataajuutta. Sitä voidaan käyttää binomijakauman mallintamiseen, kun kokeita on paljon ja muotoparametri maltillinen. Lisäksi jakaumaa voidaan käyttää sellaisen harvinaisen tapauksen mallintamiseen, jolla on pieni esiintymistodennäköisyys ja suuri kokeiden määrä. (O’Connor et al. 2016, p. 170)

Jakaumaa voidaan käyttää myös tietyn tehtävän suorittamiseen vaadittavan varaosien määrän määrittämiseen (Pham 2006, s. 8). Tämän lisäksi se soveltuu sellaisille tapauksille, joissa tutkittavien kappaleiden määrä on tuntematon (Pham 2006, s. 8).

8 TULOKSET

Työn tulosten tarkastelun helpottamiseksi taulukkoihin 8.1 ja 8.2 on koottu tärkeimmät työssä käsiteltyihin jakaumiin liittyvät ominaisuudet. Huomataan, että kaikissa jakaumissa on joko yksi tai kaksi parametriä, jotka vaikuttavat niiden ominaisuuksiin. Jakaumia kuvaavat funktiot ovat eri jakaumilla hyvinkin eri näköisiä. Keskiarvo ja varianssi saattavat olla sama kuin jokin parametrin arvo, mutta tämä pätee vain osalle jakaumista. Eksponenttifunktiolla hasardifunktion arvo on vakio eli parametrin λ arvo.

Taulukko 8.1. *Eri jakaumia kuvaavat tärkeimmät funktiot.*

	tiheysfunktio	**kertymäfunktio**	**hasardifunktio**
Weibull	$f(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}$	$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}$	$h(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}$
eksponentti	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$	$h(t) = \lambda$
log-normaali	$f(t) = \frac{1}{\sigma_N t\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t-\mu_N}{\sigma_N}\right)^2\right]$	$F(t) = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu_N}{\sigma_N}\right)$	$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\phi[\frac{\ln t - \mu_N}{\sigma_N}]}{\sigma_N t(1 - \Phi(\frac{\ln t - \mu_N}{\sigma_N}))}$
Gamma	$f(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-t\lambda}$	$F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \sum_{i=0}^{\gamma-1} \frac{\frac{t^i}{\lambda}}{i!}$	$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\frac{t^{\gamma-1}}{\theta^{\gamma}\Gamma(\gamma)} e^{-\frac{t}{\theta}}}{e^{-\frac{t}{\lambda}} \sum_{i=0}^{\gamma-1} \frac{\frac{t^i}{\lambda}}{i!}}$
Poisson	$f(k) = \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}$	$F(k) = e^{-\mu} \sum_{j=0}^{k} \frac{\mu^j}{j!}$	$h(k) = \left(1 + \frac{k!}{\mu}\left(e^{\mu} - 1 - \sum_{j=1}^{k} \frac{\mu^j}{j!}\right)\right)^{-1}$

Taulukko 8.2. *Eri jakaumien keskiarvo ja varianssi.*

	keskiarvo	varianssi
Weibull	$\alpha\Gamma(1+\frac{1}{\beta})$	$\alpha^2[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)]$
eksponentti	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
log-normaali	$\mu = e^{\mu_N+\frac{\sigma_N{}^2}{2}}$	$\sigma^2 = e^{2\mu_N+\sigma_N{}^2}(e^{\sigma_N{}^2}-1)$
Gamma	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$
Poisson	$\lambda=\frac{\mu}{t}$	$\lambda=\frac{\mu}{t}$

Vaikka monet tässä työssä käsiteltävistä jakaumista ovat sukua toisilleen, on niiden käyttökohteiden välillä kuitenkin paikoin isojakin eroja. Kaikki jakaumat soveltuvat jollakin tavalla laitteiden tai komponenttien elinikien mallintamiseen. Lisäksi niillä on muita sovelluksia, kuten Poisson-prosessin kuvaaminen tai korjausaikojen mallintaminen. Tämän lisäksi joillakin jakaumilla on sovelluksia luotettavuustekniikan ulkopuolella.

Eri jakaumien historiaa vertailtaessa löydetään joitakin eroavaisuuksia, joskin lähes kaikilla jakaumilla niiden kehityksen päävaiheet tuntuvat ajoittuvan 1900-luvun alkupuolelle. Osa jakaumista pohjautuu varhaisempiin matemaattisiin ideoihin, kuten Poisson-jakauma, josta varhaisin maininta on mahdollisesti jo vuodelta 1718. Kuten jo luvussa 2.2 mainittiin, lähes kaikki tässä työssä käsiteltävät jakaumat ovat sukua toisilleen, eli ne on kehitetty jotakin toista jakaumaa apuna käyttäen.

9 YHTEENVETO

Varhaisin tässä työssä käsiteltävä jakauma on eksponenttijakauma, joka mainitaan ensimmäisen kerran vuonna 1868 julkaistussa Ludwig Boltzmannin teoksessa *Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten* (suom. Tutkimuksia elävän voiman tasapainosta liikkuvien materiaalisten pisteiden välissä). Se on hyvin yksinkertainen jakauma, jota voidaan käyttää tilanteissa, joissa komponenttien vikaantuminen on seurausta toissijaisen syyn, kuten murtuman tai ylikuumenemisen vaikutuksesta. Eräs jakauman yksinkertainen ominaisuus on muistittomuus. Muistittomuus tarkoittaa, että jakauma ei ota huomioon tutkittavan kohteen kulumista tai elinikää. Eksponenttijakauma onkin matemaattiselta esitykseltään hyvin yksinkertainen. Sen ainoa parametri, skaala-parametri λ, saadaan tutkittavan komponentin hetkellisestä vikataajuudesta.

Ruotsalainen fyysikko Waloddi Weibull esitteli vuosien 1939 ja 1951 julkaisuissaan eksponenttijakaumaan pohjautuvan jakauman, joka sopii kuvaamaan väsymisestä tai kulumisesta johtuvaa vikaantumista, jollaisen mallintamiseen eksponenttijakauma ei soveltunut. Weibull-jakauma on tunnetuin luotettavuustekniikan jakauma, ja sillä on useita sovelluksia luotettavuustekniikan lisäksi myös monilla eri elämänalueilla. Se soveltuu kuvaamaan esimerkiksi eri komponenttien väsymistä, lasin murtumislujuutta tai tulvien esiintymistiheyttä.

Gamma-jakaumaa voidaan käyttää kuvaamaan tilanteita, joissa jokin järjestelmä hajoaa usean komponentin hajoamisen seurauksena, tai tilanteita, joissa komponentti hajoaa useassa eri vaiheessa. Lisäksi Gamma-jakaumaa voidaan käyttää tilanteessa, jossa tutkitaan sellaisen järjestelmän rikkoutumista, jolla on varajärjestelmiä. Gamma-jakaumaa ei kuitenkaan käytetä kovin yleisesti elinikämallinnuksessa. Tämän lisäksi esimerkiksi Bayesiläisessä analyysissä käytetään Gamma-jakaumaa.

Myös Poisson-jakauma pohjautuu eksponenttijakaumaan. Poisson-jakauma on eksponenttijakauman tavoin hyvin vanha jakauma, sillä ensimmäinen maininta siitä on lähteestä riippuen vuodelta 1718 (de Moivre) tai 1837 (Poisson). Jakauman varsinainen kehitystyö tapahtui kuitenkin 1800-luvun lopussa ja 1900-luvun alussa venäläis-puolalaisen matemaatikon Ladislaus von Bortkiewiczin toimesta. Poisson-jakauma on diskreetti jakauma, jonka avulla voidaan tutkia todennäköisyyttä sille, että jokin tapahtuma tapahtuu k kertaa ajassa t. Käytännössä jakauma soveltuu siis esimerkiksi tarvittavien varaosien määrän selvittämiseen. Lisäksi sitä voidaan käyttää esimerkiksi homogeenisen Poisson-prosessin mallintamiseen tai harvinaisen tapauksen mallintamiseen kokeellisesti.

Log-normaalijakauma saadaan normaalijakaumasta lisäämällä normaalijakauman yhtälöihin luonnollinen logaritmi joidenkin muuttujien eteen. Se ei siis ole sukua muille tässä työssä käsiteltäville jakaumille. Myös sen kehityksen päävaiheet ajoittuvat 1800-luvun loppuun ja 1900-luvun alkuun. Se soveltuu käytettäväksi tilanteissa, joissa vikaantumismekanismit kytkeytyvät tiukasti toisiinsa. Log-normaalijakauma soveltuu joustavuutensa ansiosta kuvaamaan monenlaista dataa. Sillä on lukuisia sovelluskohteita luotettavuustekniikan lisäksi myös muilla tieteenaloilla, kuten biologiassa ja geologiassa. Luotettavuustekniikassa log-normaalijakauma sopii hyvin esimerkiksi sähkölaitteiden vikaantumisen tai kuitujen vetolujuuden analysointiin.

LÄHTEET

Ahsanullah, M. (2010). Exponential Distribution : Theory and Methods, Nova Science Publishers, Inc,

Alizadeh, M., Rezaei, S. & Bagheri, S.F. (2015). On the Estimation for the Weibull Distribution, Annals of Data Science, Vol. 2(4), pp. 373-390. http://tut.summon.serialssolutions.com/2.0.0/link/0/eLvHCXMwlV1LS8QwEB529SKID1RcVyF4U2hJ07TZPS7aR
RbEi7DqJaRpAiKURbr_30na5mAF9dBD02FCypfMTOY-
FkLKYRt_OBOH8b9qgtsx0qlhuFStVYvBFI-
Aasu5Zcv7HHl2y1mr2OgIWbjPoj7h2U_twOqW9oiHAXdoYP8o5mY9hlgmWui-
UFUBIMdheMcIRwglrh6dImPRMSt6nKOKO99nT9xHfhHvdhZHoZUwNBI-
odk2MaJhUMvxH0s4goNOCyWLFjbHMDL1CcRP-
NUF1kBS469uERoIarR9am_cSbVVy78rsdh2yTuFmWTz-
fPUT9tHLTVq6QKO0z6aeVTHLJ8_QM9pULpa8bn3JXnQMxmaVqnmpBteLU-
iDKrRF6lyhrOFNXJBK5_ZzyB2wFR992RdutDQrmp7MVfOE5hz421oS-
SXsNN8bs0VjPG_fwHItK7W.

Elsayed, E.A. (2012). Reliability Engineering, 2. Aufl.; 2nd; 2 ed. Wiley, US,

Galambos, J. & Kotz, S. (1978). Characterizations of probability distributions : a unified approach with an emphasis on exponential and related models
, Springer-Verlag, New York,

Haight, F.A. (1967). Handbook of the poisson distribution, Wiley, New York,

Limpert, E., Stahel, W.A. & Abbt, M. (2001). Log-normal Distributions across the Sciences: Keys and Clues, Bioscience, Vol. 51(5), pp. 341-352.

Nadarajah, S. & Kotz, S. (2006). The beta exponential distribution, Reliability Engineering and System Safety, Vol. 91(6), pp. 689-697. http://tut.summon.serialssolutions.com/2.0.0/link/0/eLvHCXMwpV1ZS8QwEB68HhTxPuoBK-iTrNsmTZM-
6qLI4j6peLyE5ljQh3Vxs7A_30ybdb0RhT61SUsy07ky8w0AJUdx_YN-
MyIhGFBWjCeGx9jrBcm6UpcYyoajG4uSbe9K-Za2WuAulMSHJMmiCS-
sKXsjvcaYS9bfQeHhqXaCp47kQ8E4SQySZhmuAh0BRMn1zctpvjYsm8gv_E_vI4IV
TSVElf6OKGQAvGWsR32iqI7xksHRn0v1RapYI6WwQ9jspUmSlu4I4833xCffzHYp
dgIdivteNq3DJM2O4KzL1BNVyFPc96NWVdUbPD31MX05H8DIMI-
vaG51hpcn51eNc_roRNDXSdcZHXCle1gZaEVTA1v5HVMR-
TMpEqI1KaJ0lwJaztKq7iItcq5yjylTU51JpRldB3mC8zY77qyss9sQo2kvGBFzouEFSn
VRhkEn2feBEK5kNEIDkdbL3sV8oYcpaQ9SiQUtt-
BkEq9YRMBG1JHvNlF61fDjvA0kpcTf2T0XWia519koqCI4qKj7-nUi-
0TGklL0ab2jmebSDZ1_w4dxKaU5HsBGsP-WLV6flyBDvBSHaC1EkPxmWDNgtiN-
Wgdv643K3YXYcQ9qBKfc8sLsw6VnyBRezGgA.

Nanasi, T. (2014). Interval Censored Data Analysis with Weibull and Exponential Distribution, Applied Mechanics and Materials, Vol. 693(Novel Trends in Production Devices and Systems II), pp. 74-79. http://tut.summon.serialssolutions.com/2.0.0/link/0/eLvHCXMwnV1LSyNBEC7WXRBl2YcPjBuhL3uc2J1-zMx-pEU12V8hNUPcSuqt7wEsSdQL-fKtmJjG44MHj0DRMP6bmq6-qvgLQw4HMXtmE-hKHyLg_kPptgbBzGJBPKEG2yqaiY4r3-N5zc2MvL4rYr6me-moD3tlZFsLHecI5PmpwQkOCpEEPzX4j7jNlIcbu16amzBJ-UITHDp-Pj3C-lC4EDqdZjBGdW011LOyYxezXHxB41ry4KGrTzP-llvw08yMeRvFU3yZ1uwyPk8DYlwNpkMXKkHnDm4iVW5uGT5uPHPGn8F_0LUt-Mkq9bIe0FX6Twjy3ev_Bl86QCvO2hv4HT6k2R7sbsgc7sPfhnakKy3OyWmeP6QoLnztx-UoQRTAZLK7TXSB_WPhZFKOnxXzG66Y5Fyzt23XlOoCr8ejq_E_WtXDIFgXrI8ZgtS0N5hXmzpfoUWLE6E1ZlYhSosljpVKIhLyiVagZ4VnEPBFS1ZU-hM-eM_1ndVMRGI9AcGe0gDrZobGmskWwXqMvaB_INpH704OT1X5NfWC-COvHqXKEDK12uepBfz3efa88vNrMHhy1RzZd-tHIfUyc5gqSVOn575g_YITRl21yXPnysH5bpBLbobJ8BEVHmag.

O'Connor, A.N., Modarres, M. & Mosleh, A. (2016). Probability Distributions Used in Reliability Engineering, Center for Risk and Reliability, University of Maryland, College Park, Maryland, US,

Parravano, A., Sanchez, N. & Alfaro, E.J. (2012). The Dependence of Prestellar Core Mass Distributions on the Structure of the Parental Cloud, The Astrophysical Journal, Vol. 754(150), https://arxiv.org/abs/1206.0873.

Pham, H. (2006). Springer handbook of engineering statistics, Springer, New York,

Prabhakar Murthy, D.N., Bulmer, M. & Eccleston, J.A. (2004). Weibull model selection for reliability modelling, Reliability Engineering and System Safety, Vol. 86(3), pp. 257-267. http://tut.summon.serialssolutions.com/2.0.0/link/0/eLvHCXMwpV1LS8NAEB5setGDb7E-IHdJ89wke9Ri-kWJPKq1ewu5mAxGppaYH_72zj9D6wINCTkkmkJnZ_WZm5wEQR_3A-7InIKoT-GgmJ0mZIRXLKEIdwaSkvmutIweQpGk_JaJQ_2tIYm2RpkcDs8Hrvtnd8y1t_Xtf-nTIVUDu1UiI-OZR3oRuoQyIHu1e10PFgVS1LT_lPNl1cEtpLGJH0pF1c7jbqXZ5j8jFZrCDTcAbEKu5jUk2bZ9FExvrV1_Mff7MK2NVDdS_PeHmzI2T5srbUtPIBwImuOrqurx-i4b3qUDsrXRQPYXciX2vT-fjfPVb37ITwMr-8HN54dveAJdDgyT3BBYjVbEt0ni-jAnBVMHlkGeyTKlKRc0iCWnhNOcVSKKcBmztCxZTERVoY-kTH4Eze53JY3Ap2hA8T2RasSxBZMglww-hJqBlRYQMe3DRsri-Ymw4bRZt69lwogahRmUkRhHglPSCtFIpPvCwQAn6hO_kj3Sls-mlwdFXQ5A6dZLOU5dFDEH6vC2Io.

Saleh, J.H. & Marais, K. (2006). Highlights from the early (and pre-) history of reliability engineering, Reliability Engineering and System Safety, Vol. 91(2), pp. 249-256.

Toulias, T.L. & Kitsos, C.P. (2013). On the generalized lognormal distribution, Journal of Probability and Statistics, Vol. 2013 pp. 1-15. http://tut.summon.serialssolutions.com/2.0.0/link/0/eLvHCXMwjV1LS8QwEA7qSRHxiasu9KAHD9U82iQ9-lqWxcWL4uoIJE0qglRxuyD-eme63eruyWPbtKGT8M03meQbQgQ_o_ECJgBUqlB-kEGBnznpd108LEgA60U5RjwP_-MyHo3Qw0E-_e2oWEvrg-yBYZ-I8Ad-KRIPDihMIQvT9qF1Yoevy65CmTGtOTfNScy1t4fc4T1YL98ywTj4VMxn-8TW-TbDQ0MbqYjusWWQrlNlkbthqr4x1yeldGcBk1wtGv38FHt-8vJZLQt-

gaBXGbWla75KF3c3_Vj5vCB3HOlE5jC5zLa6-
Ud4BVkoWUOpkyayGOVTLAIy510FJm3jLumaVZ-
zoPzPFFW5bQQe2Td4gb5sqoP0vl9EskC_BLLZQ6AkggJTEvUWUcp-
pHQZEx1yPLOG-ZgKXZg6QEhTg0YzU6N1yCVaqm2C6tT1DRgj00x2U0APGdU-
qECTwitXhDThOcfUmXcBPtKd2dlYh0s6eTW-
GIASCp0QA4emQk6nx2264GXNDjQa4EcBRwEqm-qo6ZH-hHVYn1Cgg-
dPC_3zkkq7yub4FrKkdkpfqchC5ZribVD21QxPA.

Weibull Distributions and Their Applications (2006). in: Springer Handbook of Engineering Statistics, pp. 63-78.

Yu, H. & Peng, C. (2013). Estimation for weibull distribution with type II highly censored data, Quality Technology and Quantitative Management, Vol. 10(2), pp. 193-202. http://tut.summon.serialssolu-
tions.com/2.0.0/link/0/eLvHCXMwpV3Pi9QwFA6KF0FEUdlxFXJQL0PXTJL-Ong-
Yatfpov-
VgxnW9lKZJYQ47u7Bd8M_3vaTb1uJhxEspIXSGfO1735e8H4QIfsKCmU0AN6lDY
2pmdNOmgml0fA3TsdVtunLn7uc_-Zcf4dkZbvGWkyAmjPbYOS4KxPQEFt-
wNCKHf_zfgMAaQYwLtP4A-
PBQG4B6ghyuAD9eD4M_h070cAwnP7U6D2MRim0OLK78Hi0J0WRQu4ANLHY-
OsvcKY9I8-aW1grkB9PxfqYqnybFO60ydXmQqGS1WotSq-
5_P2AK7fl_Ntp6MF9rYlu5huN7jWD9PthjJT22Ao1JttivXXpdqWn-
Zy1VvTKJFgwZj4w9yyyWvFJ7Zz5Vsl9m6YMz66qLtj-ZnnGuIJUdlxPDN1pxXy-
HZZNvzS7pvtg98H2G2bZg-6ckGXvp7GeG-
qj4X9ivdjm6vr25q80xFEO9YQ87rUCXXt0n5J7dv-M5COy-
FJClPbJ0iixFZCkiS4uCemTpHbIUkX1Otqe5yjZB3wsjaFzIbChaaa1NgcA1bWiZ-
bFthI-
huHsqk5rxMMV5NxJBOLZnlV66QxJg0FN5ZLkIz8BXlUY87EvnO5leaI0DaKmbay-
BlWK3d1jnSTWxBw5bsrSuFmQt341qmtf-
aTi1Q2vWJWg1efItVnV_eoW5Gg2T0SpgF-VckHeTNdxmDADbEFWh0zL-
rL1WK6he3nYo4_Jw_E1fkUetPCB29fkfnfb_QbLsG3j.